Eksamen på Økonomistudiet vinter 2015-16

Lineære Modeller

valgfag

Tirsdag d.22. december 2015.

(3-timers prøve med hjælpemidler, dog ikke lommeregner eller cas-værktøjer)

Dette eksamenssæt består af 2 sider.

KØBENHAVNS UNIVERSITETS ØKONOMISKE INSTITUT

2015V-3LM ex

Eksamen i Lineære Modeller

Tirsdag d.22 december 2015.

Dette er en 3-timers eksamen (2 sider med i alt 4 opgaver).

Brug af bøger, noter og lignende er tilladt, men brug af lommeregner og cas-værktøjer er ikke tilladt.

Opgave 1.

Vi betragter den lineære afbildning $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, som med hensyn til standardbaserne i begge rum har afbildningsmatricen

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

(1) Bestem nulrummet for L. Er L injektiv?

(2) Bestem en basis for billedrummet, $R(L)$, for L. Er L surjektiv?

(3) Bestem løsningsmængden til ligningen $Lx = y$, hvor $y = (y_1, y_2, y_3)$ tilhører billedrummet $R(L)$. Hvad skal sammenhængen mellem y_1, y_2 og y_3 være for at $y = (y_1, y_2, y_3)$ tilhører billedrummet $R(L)$?

(4) Lad $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ og $v_3 = (1, 1, 1)$ være vektorer i $\mathbf{R}^3$. Gør rede for v_1, v_2, v_3 er en basis for $\mathbf{R}^3$.

(5) Bestem afbildningsmatricen for den lineære afbildning $L : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ med hensyn til standardbasen i $\mathbf{R}^2$ og basen v_1, v_2, v_3 i $\mathbf{R}^3$.

Opgave 2.

Om en symmetrisk, $2 \times 2-$matrix A, vides, at den har egenværdierne 1 og 2, med tilhørende egenvektorer $v_1 = (1, 1)$ og $v_2 = (x_1, x_2)$ og om en anden $2 \times 2-$matrix B, vides, at den har egenværdierne 3 og 4, med samme tilhørende egenvektorer v_1 og v_2 som A.

(1) Bestem en mulig egenvektor $v_2 = (x_1, x_2)$.

(2) Vis at B er symmetrisk.

(3) Bestem matricen AB.

(4) Bestem determinanten for matricen $A^{-2}B$.

(5) Bestem vektoren $A^{-2}Bv_1$.

(6) Lad nu funktionen p være $p(\lambda) = \lambda^2 - 11\lambda + 24$. Vis at $p(AB) = (AB)^2 - 11AB + 24E = O$, hvor O er $2 \times 2-$nulmatricen.

Opgave 3.

(1) Beregn integralet $\int \cos(2ax)\cos^2(ax)dx$, for $a \neq 0$.

(2) Løs ligningen $z^2 = 3 + i2$. Løsningerne ønskes angivet på rektangulær form $a + ib$.

Opgave 4.

Vi betragter funktionen f, som er sumfunktion for rækken

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{2x} - 2e^x + 1}\right)^n.$$

(1) Bestem de værdier af x, for hvilke funktionen f er veldefineret.

(2) Bestem en regneforskrift for funktionen f.

(3) Bestem monotoniforholdene for funktionen f, og undersøg om funktionen er injektiv.

(4) Bestem værdimængden for funktionen f.

(5) Løs ligningen $f(x) = y$ (med hensyn til x) for et givet y beliggende i værdimængden for funktionen f.